Die Grundlagen der Physik.

(Erste Mitteilung.)

Von

David Hilbert.

Vorgelegt in der Sitzung vom 20. November 1915.

Die gewaltigen Problemstellungen von Einstein[1]) sowie dessen scharfsinnige zu ihrer Lösung ersonnenen Methoden und die tiefgreifenden Gedanken und originellen Begriffsbildungen, vermöge derer Mie[2]) seine Elektrodynamik aufbaut, haben der Untersuchung über die Grundlagen der Physik neue Wege eröffnet.

Ich möchte im Folgenden — im Sinne der axiomatischen Methode — wesentlich aus zwei einfachen Axiomen ein neues System von Grundgleichungen der Physik aufstellen, die von idealer Schönheit sind, und in denen, wie ich glaube, die Lösung der Probleme von Einstein und Mie gleichzeitig enthalten ist. Die genauere Ausführung sowie vor Allem die spezielle Anwendung meiner Grundgleichungen auf die fundamentalen Fragen der Elektrizitätslehre behalte ich späteren Mitteilungen vor.

Es seien w_s $(s = 1, 2, 3, 4)$ irgendwelche die Weltpunkte wesentlich eindeutig benennende Koordinaten, die sogenannten Weltparameter (allgemeinste Raum-Zeit-Koordinaten). Die das Geschehen in w_s charakterisierenden Größen seien:

1) die zehn zuerst von Einstein eingeführten Gravitationspotentiale $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ mit symmetrischem Tensorcharakter gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter w_s;

2) die vier elektrodynamischen Potentiale q_s mit Vektorcharakter im selben Sinne.

---

1) Sitzungsber. d. Berliner Akad. 1914 S. 1030, 1915 S. 778, 799, 831, 844.

2) Ann. d. Phys. 1912, Bd. 37 S. 511, Bd. 39 S. 1, 1913, Bd. 40 S. 1.

Das physikalische Geschehen ist nicht willkürlich, es gelten vielmehr folgende zwei Axiome:

Axiom I (Mie's Axiom von der Weltfunktion[1]): *Das Gesetz des physikalischen Geschehens bestimmt sich durch eine Weltfunktion H, die folgende Argumente enthält:*

$$g_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu l} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial w_l}, \quad g_{\mu\nu lk} = \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial w_l \partial w_k}, \tag{1}$$

$$q_s, \quad q_{sl} = \frac{\partial q_s}{\partial w_l}, \qquad (l, k = 1, 2, 3, 4) \tag{2}$$

und zwar muß die Variation des Integrals

$$\int H \sqrt{g}\, d\omega$$
$$(g = |g_{\mu\nu}|, \quad d\omega = dw_1 dw_2 dw_3 dw_4)$$

für jedes der 14 Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s verschwinden.

An Stelle der Argumente (1) können offenbar auch die Argumente

$$g^{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu}_l = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial w_l}, \quad g^{\mu\nu}_{lk} = \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial w_l \partial w_k} \tag{3}$$

treten, wobei $g^{\mu\nu}$ die durch g dividierte Unterdeterminante der Determinante g in Bezug auf ihr Element $g_{\mu\nu}$ bedeutet.

Axiom II (Axiom von der allgemeinen Invarianz[2]): *Die Weltfunktion H ist eine Invariante gegenüber einer beliebigen Transformation der Weltparameter w_s.*

Axiom II ist der einfachste mathematische Ausdruck für die Forderung, daß die Verkettung der Potentiale $g_{\mu\nu}$, q_s an und für sich völlig unabhängig ist von der Art, wie man die Weltpunkte durch Weltparameter benennen will.

Das Leitmotiv für den Aufbau meiner Theorie liefert der folgende mathematische Satz, dessen Beweis ich an einer anderen Stelle darlegen werde.

1) Mie's Weltfunktionen enthalten nicht genau diese Argumente; insbesondere geht der Gebrauch der Argumente (2) auf Born zurück; es ist jedoch gerade die Einführung und Verwendung einer solchen Weltfunktion im Hamiltonschen Prinzip das Charakteristische der Mie'schen Elektrodynamik.

2) Die Forderung der orthogonalen Invarianz hat bereits Mie gestellt. In dem oben aufgestellten Axiom II findet der Einsteinsche fundamentale Grundgedanke der allgemeinen Invarianz den einfachsten Ausdruck, wennschon bei Einstein das Hamiltonsche Prinzip nur eine Nebenrolle spielt und seine Funktionen H keineswegs allgemeine Invarianten sind, auch die elektrischen Potentiale nicht enthalten.

Theorem I. Ist J eine Invariante bei beliebiger Transformation der vier Weltparameter, welche n Größen und ihre Ableitungen enthält, und bildet man dann aus

$$\delta \int J \sqrt{g}\, d\omega = 0$$

in Bezug auf jene n Größen die n Lagrangeschen Variationsgleichungen, so sind in diesem invarianten System von n Differentialgleichungen für die n Größen stets vier eine Folge der $n-4$ übrigen — in dem Sinne, daß zwischen den n Differentialgleichungen und ihren totalen Ableitungen stets vier lineare, von einander unabhängige Kombinationen identisch erfüllt sind.

Bezüglich der Differentialquotienten nach $g^{\mu\nu}$, $g_k^{\mu\nu}$, $g_{kl}^{\mu\nu}$, wie sie in (4) und nachfolgenden Formeln auftreten, sei ein für allemal bemerkt, daß wegen der Symmetrie in μ, ν einerseits und k, l andererseits die Differentialquotienten nach $g^{\mu\nu}$, $g_k^{\mu\nu}$ mit 1 bezw. $\frac{1}{2}$ multipliziert zu nehmen sind, jenachdem $\mu = \nu$ bezw. $\mu \neq \nu$ ausfällt, ferner die Differentialquotienten nach $g_{kl}^{\mu\nu}$ mit 1 bezw. $\frac{1}{2}$ bezw. $\frac{1}{4}$ multipliziert zu nehmen sind, jenachdem $\mu = \nu$ und $k = l$ bezw. $\mu = \nu$ und $k \neq l$ oder $\mu \neq \nu$ und $k = l$ bezw. $\mu \neq \nu$ und $k \neq l$ ausfällt.

Aus Axiom I folgen zunächst bezüglich der zehn Gravitationspotentiale $g^{\mu\nu}$ die zehn Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$(4)\quad \frac{\partial \sqrt{g}\, H}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k} \frac{\partial \sqrt{g}\, H}{\partial g_k^{\mu\nu}} + \sum_{k,l} \frac{\partial^2}{\partial w_k\, \partial w_l} \frac{\partial \sqrt{g}\, H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} = 0, \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$$

und sodann bezüglich der vier elektrodynamischen Potentiale q_s die vier Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$(5)\quad \frac{\partial \sqrt{g}\, H}{\partial q_h} - \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k} \frac{\partial \sqrt{g}\, H}{\partial q_{hk}} = 0, \quad (h = 1, 2, 3, 4).$$

Der Kürze halber bezeichnen wir die linken Seiten der Gleichungen (4), (5) bez. mit

$$[\sqrt{g}\, H]_{\mu\nu}, \quad [\sqrt{g}\, H]_h.$$

Die Gleichungen (4) mögen die Grundgleichungen der Gravitation, die Gleichungen (5) die elektrodynamischen Grundgleichungen oder die verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen heißen. Infolge des oben aufgestellten Theorems können die vier Gleichungen (5) als eine Folge der Gleichungen (4) angesehen werden, d. h. wir können unmittelbar wegen jenes mathematischen Satzes die Behauptung aussprechen, *daß in dem bezeichneten Sinne die elektrodynamischen Erscheinungen Wirkungen der Gravitation sind.* In dieser

Erkenntnis erblicke ich die einfache und sehr überraschende Lösung des Problems von Riemann, der als der Erste theoretisch nach dem Zusammenhang zwischen Gravitation und Licht gesucht hat.

Im folgenden benutzen wir die leicht beweisbare Tatsache, daß, wenn p^j $(j = 1, 2, 3, 4)$ einen willkürlichen kontravarianten Vektor bedeutet, der Ausdruck

$$p^{\mu\nu} = \sum_s (g_s^{\mu\nu} p^s - g^{\mu s} p_s^\nu - g^{\nu s} p_s^\mu), \qquad \left(p_s^j = \frac{\partial p^j}{\partial w_s}\right)$$

einen symmetrischen kontravarianten Tensor und der Ausdruck

$$p_l = \sum_s (q_{ls} p^s + q_s p_l^s)$$

einen kovarianten Vektor darstellt.

Des Weiteren stellen wir zwei mathematische Theoreme auf, die wie folgt lauten:

Theorem II. Wenn J eine von $g^{\mu\nu}, g_l^{\mu\nu}, g_{lk}^{\mu\nu}, q_s, q_{sk}$ abhängige Invariante ist, so gilt stets identisch in allen Argumenten und für jeden willkürlichen kontravarianten Vektor p^s

$$\sum_{\mu,\nu,l,k} \left(\frac{\partial J}{\partial g^{\mu\nu}} \varDelta g^{\mu\nu} + \frac{\partial J}{\partial g_l^{\mu\nu}} \varDelta g_l^{\mu\nu} + \frac{\partial J}{\partial g_{lk}^{\mu\nu}} \varDelta g_{lk}^{\mu\nu}\right)$$
$$+ \sum_{s,k} \left(\frac{\partial J}{\partial q_s} \varDelta q_s + \frac{\partial J}{\partial q} \varDelta q_{sk}\right) = 0$$

dabei ist

$$\begin{aligned}
\varDelta g^{\mu\nu} &= \sum_m (g^{\mu m} p_m^\nu + g^{\nu m} p_m^\mu), \\
\varDelta g_l^{\mu\nu} &= -\sum_m g_m^{\mu\nu} p_l^m + \frac{\partial \varDelta g^{\mu\nu}}{\partial w_l}, \\
\varDelta g_{lk}^{\mu\nu} &= -\sum_m (g_m^{\mu\nu} p_{lk}^m + g_{lm}^{\mu\nu} p_k^m + g_{km}^{\mu\nu} p_l^m) + \frac{\partial^2 \varDelta g^{\mu\nu}}{\partial w_l \partial w_k}, \\
\varDelta q_s &= -\sum_m q_m p_s^m, \\
\varDelta q_{sk} &= -\sum_m q_{sm} p_k^m + \frac{\partial \varDelta q_s}{\partial w_k}.
\end{aligned}$$

Dieses Theorem II läßt sich auch folgendermaßen aussprechen:

Wenn J eine Invariante und p^s ein willkürlicher Vektor wie vorhin ist, so gilt die Identität

$$\sum_s \frac{\partial J}{\partial w_s} p^s = PJ; \tag{6}$$

dabei ist

$$P = P_g + P_q,$$

$$P_g = \sum_{\mu, \nu, l, k} \left(p^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} + p_l^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g_l^{\mu\nu}} + p_{lk}^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial g_{lk}^{\mu\nu}} \right)$$

$$P_q = \sum_{l, k} \left(p_l \frac{\partial}{\partial q_l} + p_{lk} \frac{\partial}{\partial q_{lk}} \right)$$

gesetzt und es gelten die Abkürzungen:

$$p_k^{\mu\nu} = \frac{\partial p^{\mu\nu}}{\partial w_k}, \quad p_{kl}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 p^{\mu\nu}}{\partial w_k \partial w_l}, \quad p_{lk} = \frac{\partial p_l}{\partial w_k}.$$

Der Beweis von (6) ergibt sich leicht; denn diese Identität ist offenbar richtig, wenn p^s ein konstanter Vektor ist und daraus folgt sie wegen ihrer Invarianz allgemein.

Theorem III. Wenn J eine nur von den $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängige Invariante ist, und, wie oben, die Variationsableitungen von $\sqrt{g}\, J$ bezüglich $g^{\mu\nu}$ mit $[\sqrt{g}\, J]_{\mu\nu}$ bezeichnet werden, so stellt der Ausdruck — unter $h^{\mu\nu}$ irgend einen kontravarianten Tensor verstanden —

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu, \nu} [\sqrt{g}\, J]_{\mu\nu} h^{\mu\nu}$$

eine Invariante dar; setzen wir in dieser Summe an Stelle von $h^{\mu\nu}$ den besonderen Tensor $p^{\mu\nu}$ ein und schreiben

$$\sum_{\mu, \nu} [\sqrt{g}\, J]_{\mu\nu} p^{\mu\nu} = \sum_{s, l} (i_s p^s + i_s^l p_l^s),$$

wo alsdann die Ausdrücke

$$i_s = \sum_{\mu, \nu} [\sqrt{g}\, J]_{\mu\nu} g_s^{\mu\nu},$$

$$i_s^l = -2 \sum_{\mu} [\sqrt{g}\, J]_{\mu s} g^{\mu l}$$

lediglich von den $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängen, so ist

$$(7) \qquad i_s = \sum_l \frac{\partial i_s^l}{\partial w_l}$$

in der Weise, daß diese Gleichung identisch für alle Argumente, nämlich die $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen, erfüllt ist.

Zum Beweise betrachten wir das Integral

$$\int J \sqrt{g}\, d\omega, \quad d\omega = dw_1 dw_2 dw_3 dw_4$$

das über ein endliches Stück der vierdimensionalen Welt zu erstrecken ist. Ferner soll p^s ein Vektor sein, der nebst seinen Ableitungen auf der dreidimensionalen Oberfläche jenes Weltstückes verschwindet. Wegen $P = P_g$ folgt aus der letzten Formel der nächsten Seite

$$P_g(\sqrt{g}\,J) = \sum_s \frac{\partial \sqrt{g}\,J p^s}{\partial w_s};$$

dies ergibt

$$\int P_g(J\sqrt{g})\,d\omega = 0$$

und wegen der Bildungsweise der Lagrangeschen Ableitung ist demnach auch

$$\int \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}\,J]_{\mu\nu} p^{\mu\nu}\,d\omega = 0.$$

Die Einführung von i_s, i_s^l in diese Identität zeigt schließlich, daß

$$\int \Big(\sum_l \frac{\partial i_s^l}{\partial w_l} - i_s\Big) p^s\,d\omega = 0$$

und daher auch die Behauptung unseres Theorems richtig ist.

Das wichtigste Ziel ist nunmehr die Aufstellung des Begriffes der Energie und die Herleitung des Energiesatzes allein auf Grund der beiden Axiome I und II.

Dazu bilden wir zunächst:

$$P_g(\sqrt{g}\,H) = \sum_{\mu,\nu,k,l} \Big(\frac{\partial \sqrt{g}\,H}{\partial g^{\mu\nu}} p^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}\,H}{\partial g_k^{\mu\nu}} p_k^{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}\,H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} p_{kl}^{\mu\nu}\Big).$$

Nun ist $\dfrac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}}$ ein gemischter Tensor vierter Ordnung und daher wird, wenn man

$$A_k^{\mu\nu} = p_k^{\mu\nu} + \sum_\varrho \Big(\begin{Bmatrix} k\varrho \\ \mu \end{Bmatrix} p^{\varrho\nu} + \begin{Bmatrix} k\varrho \\ \nu \end{Bmatrix} p^{\varrho\mu}\Big),$$

$$\begin{Bmatrix} k\varrho \\ \mu \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_\sigma g^{\mu\sigma} (g_{k\sigma\varrho} + g_{\varrho\sigma k} - g_{k\varrho\sigma}),$$

setzt, der Ausdruck

$$a^l = \sum_{\mu,\nu,k} \frac{\partial H}{\partial g_{kl}^{\mu\nu}} A_k^{\mu\nu} \tag{8}$$

ein kontragredienter Vektor.

Bilden wir daher den Ausdruck

$$P_g(\sqrt{g}\,H) - \sum_l \frac{\partial \sqrt{g}\,a^l}{\partial w_l}$$

so enthält derselbe die zweiten Ableitungen $p_{kl}^{\mu\nu}$ nicht mehr und hat daher die Gestalt

$$\sqrt{g}\sum_{\mu,\nu,k}(B_{\mu\nu}p^{\mu\nu}+B^k_{\mu\nu}p^{\mu\nu}_k),$$

worin

$$B^k_{\mu\nu}=\sum_{\varrho,l}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_k}-\frac{\partial}{\partial w_l}\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\nu}_{kl}}-\frac{\partial H}{\partial g^{\varrho\nu}_{kl}}\begin{Bmatrix}l\mu\\ \varrho\end{Bmatrix}-\frac{\partial H}{\partial g^{\mu\varrho}_{kl}}\begin{Bmatrix}l\nu\\ \varrho\end{Bmatrix}\right)$$

wiederum ein gemischter Tensor ist.

Nunmehr bilden wir den Vektor

$$b^l=\sum_{\mu,\nu}B^l_{\mu\nu}p^{\mu\nu} \tag{9}$$

und erhalten dann

$$P_g(\sqrt{g}\,H)-\sum_l\frac{\partial\sqrt{g}\,(a^l+b^l)}{\partial w_l}=\sum_{\mu,\nu}[\sqrt{g}\,H]_{\mu\nu}p^{\mu\nu}. \tag{10}$$

Andererseits bilden wir

$$P_q(\sqrt{g}\,H)=\sum_{k,l}\left(\frac{\partial\sqrt{g}\,H}{\partial q_k}p_k+\frac{\partial\sqrt{g}\,H}{\partial q_{kl}}p_{kl}\right);$$

dann ist $\frac{\partial H}{\partial q_{kl}}$ ein Tensor und der Ausdruck

$$c^l=\sum_k\frac{\partial H}{\partial q_{kl}}p_k \tag{11}$$

stellt daher einen kontragredienten Vektor dar. Entsprechend, wie oben, wird

$$P_q(\sqrt{g}\,H)-\sum_l\frac{\partial\sqrt{g}\,c^l}{dw_l}=\sum_k[\sqrt{g}\,H]_k p_k. \tag{12}$$

Berücksichtigen wir nun die Grundgleichungen (4) und (5), so folgt durch Addition von (10) und (12):

$$P(\sqrt{g}\,H)=\sum_l\frac{\partial\sqrt{g}\,(a^l+b^l+c^l)}{\partial w_l}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}P(\sqrt{g}\,H)&=\sqrt{g}\,PH+H\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}}p^{\mu\nu}\\&=\sqrt{g}\,PH+H\sum_s\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial w_s}p^s+\sqrt{g}\,p^s_s\right)\end{aligned}$$

und vermöge der Identität (6) daher

$$P(\sqrt{g}\,H)=\sqrt{g}\sum_s\frac{\partial H}{\partial w_s}p^s+H\sum_s\left(\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial w_s}p^s+\sqrt{g}\,p^s_s\right)=\sum_s\frac{\partial\sqrt{g}\,Hp^s}{\partial w_s}.$$

Somit erhalten wir schließlich die invariante Gleichung

$$\sum_l \frac{\partial}{\partial w_l} \sqrt{g}\,(Hp^l - a^l - b^l - c^l) = 0$$

Jetzt berücksichtigen wir daß

$$\frac{\partial H}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial H}{\partial q_{kl}}$$

ein schiefsymmetrischer kontravarianter Tensor ist; infolgedessen wird

$$d^l = \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum_{k,s} \frac{\partial}{\partial w_k} \left\{ \left(\frac{\partial \sqrt{g}\, H}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial \sqrt{g}\, H}{\partial q_{kl}} \right) p^s q_s \right\} \tag{13}$$

ein kontravarianter Vektor und zwar erfüllt derselbe offenbar die Identität

$$\sum_l \frac{\partial \sqrt{g}\, d^l}{\partial w_l} = 0.$$

Definieren wir nunmehr

$$e^l = Hp^l - a^l - b^l - c^l - d^l \tag{14}$$

als den *Energievektor*, *so ist der Energievektor ein kontravarianter Vektor, der noch von dem willkürlichen Vektor p^s linear abhängt und identisch für jede Wahl dieses Vektors p^s die invariante Energiegleichung*

$$\sum_l \frac{\partial \sqrt{g}\, e^l}{\partial w_l} = 0$$

erfüllt.

Was die Weltfunktion H betrifft, so sind, damit ihre Wahl eindeutig wird, noch weitere Axiome erforderlich. Sollen die Gravitationsgleichungen nur zweite Ableitungen der Potentiale $g^{\mu\nu}$ enthalten, so muß H die Gestalt haben

$$H = K + L$$

wo K die aus dem Riemannschen Tensor entspringende Invariante (Krümmung der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit)

$$K = \sum_{\mu,\nu} g^{\mu\nu} K_{\mu\nu},$$

$$K_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa} \left(\frac{\partial}{\partial w_\nu} \begin{Bmatrix} \mu\varkappa \\ \varkappa \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial w_\varkappa} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \varkappa \end{Bmatrix} \right) + \sum_{\varkappa,\lambda} \left(\begin{Bmatrix} \mu\varkappa \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda\nu \\ \varkappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \lambda \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda\varkappa \\ \varkappa \end{Bmatrix} \right)$$

bedeutet und L nur von $g^{\mu\nu}$, $g_l^{\mu\nu}$, q_s, q_{sk} abhängt. Endlich machen wir im folgenden noch die vereinfachende Annahme, daß L nicht die $g_l^{\mu\nu}$ enthält.

Wir wenden alsdann Theorem II auf die Invariante L an und erhalten

$$(15)\quad \sum_{\mu,\nu,m} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}}(g^{\mu m} p_m^\nu + g^{\nu m} p_m^\mu) - \sum_{s,m} \frac{\partial L}{\partial q_s} q_m p_s^m$$

$$- \sum_{s,k,m} \frac{\partial L}{\partial q_{sk}}(q_{sm} p_k^m + q_{mk} p_s^m + q_m p_{sk}^m) = 0.$$

Das Nullsetzen des Koeffizienten von p_{sk}^m linker Hand liefert die Gleichung

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q_{sk}} + \frac{\partial L}{\partial q_{ks}}\right) q_m = 0$$

oder

$$(16)\quad \frac{\partial L}{\partial q_{sk}} + \frac{\partial L}{\partial q_{ks}} = 0,$$

d. h. die Ableitungen der elektrodynamischen Potentiale q_s treten nur in den Verbindungen

$$M_{ks} = q_{sk} - q_{ks}$$

auf. Damit erkennen wir, daß bei unseren Annahmen die Invariante L außer den Potentialen $g^{\mu\nu}$, q_s lediglich von den Komponenten des schiefsymmetrischen invarianten Tensors

$$M = (M_{ks}) = \mathrm{Rot}\,(q_s)$$

d. h. des sogenannten elektromagnetischen Sechservektors abhängt. *Dieses Resultat, durch welches erst der Charakter der Maxwellschen Gleichungen bedingt ist, ergibt sich hier wesentlich als Folge der allgemeinen Invarianz, also auf Grund von Axiom II.*

Setzen wir in der Identität (15) den Koeffizienten von p_m^ν linker Hand gleich Null, so erhalten wir mit Benutzung von (16)

$$(17)\quad 2\sum_{\mu} \frac{\partial L}{\partial g^{\mu\nu}} g^{\mu m} - \frac{\partial L}{\partial q_m} q_\nu - \sum_{s} \frac{\partial L}{\partial M_{ms}} M_{\nu s} = 0, \quad (\mu = 1, 2, 3, 4).$$

Diese Gleichung gestattet eine wichtige Umformung der elektromagnetischen Energie, d. h. des von L herrührenden Theiles des Energievektors. Dieser Teil ergibt sich nämlich aus (11), (13), (14) wie folgt:

$$Lp^l - \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_{kl}} p_k - \frac{1}{2\sqrt{g}} \sum_{k,s} \frac{\partial}{\partial w_k}\left\{\left(\frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial q_{lk}} - \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial q_{kl}}\right) p^s q_s\right\}.$$

Wegen (16) und mit Berücksichtigung von (5) wird dieser Ausdruck gleich

$$\sum_{s,k}\left(L\delta_s^l - \frac{\partial L}{\partial M_{lk}} M_{sk} - \frac{\partial L}{\partial q_l} q_s\right) p^s \tag{18}$$
$$(\delta_s^l = 0,\ l \neq s;\ \delta_s^s = 1)$$

d. h. wegen (17) gleich

$$-\frac{2}{\sqrt{g}} \sum_{\mu, s} \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial g^{\mu s}} g^{\mu l} p^s. \tag{19}$$

Wegen der im folgenden entwickelten Formeln (21) ersehen wir hieraus insbesondere, daß die elektromagnetische Energie und mithin auch der totale Energievektor e^l sich allein durch K ausdrücken läßt, so daß nur die $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen, nicht aber die q_s und deren Ableitungen darin auftreten. Wenn man in dem Ausdrucke (18) zur Grenze für

$$g_{\mu\nu} = 0, \quad (\mu \neq \nu)$$
$$g_{\mu\mu} = 1$$

übergeht, so stimmt derselbe genau mit demjenigen überein, den Mie in seiner Elektrodynamik aufgestellt hat: der Mie'sche elektromagnetische Energietensor ist also nichts anderes als der durch Differentiation der Invariante L nach den Gravitationspotentialen $g^{\mu\nu}$ entstehende allgemein invariante Tensor beim Übergang zu jener Grenze — ein Umstand, der mich zum ersten Mal auf den notwendigen engen Zusammenhang zwischen der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie und der Mie'schen Elektrodynamik hingewiesen und mir die Überzeugung von der Richtigkeit der hier entwickelten Theorie gegeben hat.

Es bleibt noch übrig, bei der Annahme

$$H = K + L, \tag{20}$$

direkt zu zeigen, wie die oben aufgestellten verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen (5) eine Folge der Gravitationsgleichungen (4) in dem oben angegebenen Sinne sind.

Unter Verwendung der vorhin eingeführten Bezeichnungsweise für die Variationsableitungen bezüglich der $g^{\mu\nu}$ erhalten die Gravitationsgleichungen wegen (20) die Gestalt

$$[\sqrt{g}\, K]_{\mu\nu} + \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial g^{\mu\nu}} = 0. \tag{21}$$

Das erste Glied linker Hand wird

$$[\sqrt{g}\, K]_{\mu\nu} = \sqrt{g}\,(K_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} K g_{\mu\nu}),$$

wie leicht ohne Rechnung aus der Tatsache folgt, daß $K_{\mu\nu}$ außer $g_{\mu\nu}$ der einzige Tensor zweiter Ordnung und K die einzige Invariante ist, die nur mit den $g^{\mu\nu}$ und deren ersten und zweiten Differentialquotienten $g_k^{\mu\nu}$, $g_{kl}^{\mu\nu}$ gebildet werden kann.

Die so zu Stande kommenden Differentialgleichungen der Gravitation sind, wie mir scheint, mit der von Einstein in seinen späteren Abhandlungen[1]) aufgestellten großzügigen Theorie der allgemeinen Relativität im Einklang.

Bezeichnen wir ferner allgemein wie oben die Variationsableitungen von $\sqrt{g}\,J$ bezüglich des elektrodynamischen Potentials q_h mit

$$[\sqrt{g}\,J]_h = \frac{\partial\sqrt{g}\,J}{\partial q_h} - \sum_k \frac{\partial}{\partial w_k}\frac{\partial\sqrt{g}\,J}{\partial q_{hk}},$$

so erhalten die elektrodynamischen Grundgleichungen wegen (20) die Gestalt

$$[\sqrt{g}\,L]_h = 0. \tag{22}$$

Da nun K eine lediglich von $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängige Invariante ist, so gilt nach Theorem III identisch die Gleichung (7), worin

$$i_s = \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g}\,K]_{\mu\nu}\, g_s^{\mu\nu} \tag{23}$$

und

$$i_s^l = -2\sum_{\mu} [\sqrt{g}\,K]_{\mu s}\, g^{\mu l}, \quad (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{24}$$

ist.

Wegen (21) und (24) ist (19) gleich $-\frac{1}{\sqrt{g}}\, i_\nu^m$. Durch Differentiation nach w_m und Summation über m erhalten wir wegen (7)

$$\begin{aligned}
i_\nu = {} & \sum_m \frac{\partial}{\partial w_m}\left(-\sqrt{g}\,L\,\delta_\nu^m + \frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_m}\, q_\nu + \sum_s \frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial M_{sm}}\, M_{s\nu}\right) \\
= {} & -\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial w_\nu} + \sum_m \left\{ q_\nu \frac{\partial}{\partial w_m}\left([\sqrt{g}\,L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_{ms}}\right)\right. \\
& \left. + q_{\nu m}\left([\sqrt{g}\,L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_{ms}}\right)\right\} \\
& + \sum_s \left([\sqrt{g}\,L]_s - \frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_s}\right) M_{s\nu} + \sum_{s,m} \frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial M_{sm}}\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m},
\end{aligned}$$

da ja

$$\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_m} = [\sqrt{g}\,L]_m + \sum_s \frac{\partial}{\partial w_s}\frac{\partial\sqrt{g}\,L}{\partial q_{ms}}$$

1) l. c. Berliner. Sitzungsber. 1915.

und

$$-\sum_m \frac{\partial}{\partial w_m} \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial q_{sm}} = [\sqrt{g}\, L] - \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial q_s}.$$

Nunmehr berücksichtigen wir, daß wegen (16)

$$\sum_{m,s} \frac{\partial^2}{\partial w_m \partial w_s} \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial q_{ms}} = 0$$

ist, und erhalten dann bei geeigneter Zusammenfassung:

$$(25) \qquad i_\nu = -\frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial w_\nu} + \sum_m \left(q_\nu \frac{\partial}{\partial w_m} [\sqrt{g}\, L]_m + M_{m\nu} [\sqrt{g}\, L]_m \right) + \sum_m \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial q_m} q_{m\nu} + \sum_{s,m} \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial M_{sm}} \frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m}.$$

Andererseits ist

$$-\frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial w_\nu} = -\sum_{s,m} \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial g^{sm}} g_\nu^{sm} - \sum_m \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial q_m} q_{m\nu} - \sum_{m,s} \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial q_{ms}} \frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu}.$$

Das erste Glied der rechten Seite ist wegen (21) und (23) nichts anderes als i_ν. Das letzte Glied rechter Hand erweist sich als entgegengesetzt gleich dem letzten Glied rechter Hand in (25); es ist nämlich

$$(26) \qquad \sum_{s,m} \frac{\partial \sqrt{g}\, L}{\partial M_{sm}} \left(\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m} - \frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu} \right) = 0,$$

da der Ausdruck

$$\frac{\partial M_{s\nu}}{\partial w_m} - \frac{\partial q_{ms}}{\partial w_\nu} = \frac{\partial^2 q_\nu}{\partial w_s \partial w_m} - \frac{\partial^2 q_s}{\partial w_\nu \partial w_m} - \frac{\partial^2 q_m}{\partial w_\nu \partial w_s}$$

symmetrisch in s, m und der erste Faktor unter dem Summenzeichen in (26) schiefsymmetrisch in s, m ausfällt.

Aus (25) folgt mithin die Gleichung

$$(27) \qquad \sum_m \left(M_{m\nu} [\sqrt{g}\, L]_m + q_\nu \frac{\partial}{\partial w_m} [\sqrt{g}\, L]_m \right) = 0;$$

d. h. aus den Gravitationsgleichungen (4) folgen in der Tat die vier von einander unabhängigen linearen Kombinationen (27) der elektrodynamischen Grundgleichungen (5) und ihrer ersten Ableitungen. *Dies ist der genaue mathematische Ausdruck der oben allgemein ausgesprochenen Behauptung über den Charakter der Elektrodynamik als einer Folgeerscheinung der Gravitation.*

Da L unserer Annahme zufolge nicht von den Ableitungen der $g^{\mu\nu}$ abhängen soll, so muß L eine Funktion von gewissen vier allgemeinen Invarianten sein, die den von Mie angegebenen speziellen orthogonalen Invarianten entsprechen und von denen die beiden einfachsten diese sind:

$$Q = \sum_{k,l,m,n} M_{mn} M_{lk} g^{mk} g^{nl}$$

und

$$q = \sum_{k,l} q_k q_l g^{kl}.$$

Der einfachste und im Hinblick auf den Bau von K nächstliegende Ansatz für L ist zugleich derjenige, der der Mie'schen Elektrodynamik entspricht, nämlich

$$L = \alpha Q + f(q)$$

oder noch spezieller an Mie anschließend:

$$L = \alpha Q + \beta q^3,$$

wo $f(q)$ irgend eine Funktion von q und α, β Konstante bedeuten.

Wie man sieht, genügen bei sinngemäßer Deutung die wenigen einfachen in den Axiomen I und II ausgesprochenen Annahmen zum Aufbau der Theorie: durch dieselbe werden nicht nur unsere Vorstellungen über Raum, Zeit und Bewegung von Grund aus in dem von Einstein dargelegten Sinne umgestaltet, sondern ich bin auch der Überzeugung, daß durch die hier aufgestellten Grundgleichungen die intimsten bisher verborgenen Vorgänge innerhalb des Atoms Aufklärung erhalten werden und insbesondere allgemein eine Zurückführung aller physikalischen Konstanten auf mathematische Konstanten möglich sein muß — wie denn überhaupt damit die Möglichkeit naherückt, daß aus der Physik im Prinzip eine Wissenschaft von der Art der Geometrie werde: gewiß der herrlichste Ruhm der axiomatischen Methode, die hier wie wir sehen die mächtigen Instrumente der Analysis, nämlich Variationsrechnung und Invariantentheorie, in ihre Dienste nimmt.