Physique et géométrie

31 octobre 2004

Ceci est un petit texte, aussi simple que possible, destiné à faire comprendre la démarche où physique et géométrie se trouvent liées. .

Considérons un espace à deux dimensions, constitué par des points *X*, décrits par les coordonnées :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ceci est une matrice colonne. Sa *transposée* est la matrice ligne :

$$^{t}X = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$$

C'est un cas particulier de transposée d'une matrice, la transposition étant la permutation des termes par rapport à la diagonale principale.

$$^{t}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

Une matrice symétrique est du type :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

Une matrice antisymétrique est du type :

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$

Ses termes diagonaux sont toujours nuls.

On va doter cet espace d'un produit scalaire. Je dis bien *d'un*.

Je vais définir ce produit scalaire comme suit :

$$S = {}^{t}X \; M \; X'$$

Je ne préjuge pas de ce que peut être cette matrice M, a priori.

Je peux envisager que cette matrice *M* soit la matrice unité *I* :

$$M = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A ce moment mon produit scalaire sera :

$$S = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \textit{ accesoirement égal à } \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = x\,x' + y\,y'$$

Le produit scalaire me permettra de définir dans cet espace la longueur L d'un vecteur X, selon :

$$L^2 = {}^tX \; M \; X$$

Dans le cas euclidien cette longueur sera toujours r*éelle* (dans la mesure où les variables sont prises dans R) et égale à :

$$L = \textit{longueur du vecteur } X = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Si je passe à des valeurs différentielles et à un vecteur dX je peux écrire :

$$ds^2 = {}^tdX\, M\, dX$$

J'appellerai cette forme quadratique une *métrique*.

Si $M = I$, I étant la matrice unité :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

j'aurai :

$$ds^2 = {}^tdX\, M\, dX = dx^2 + dy^2$$

Autrement dit, sous une forme différentielle je retrouve … Pythagore et je dirai que cette métrique est *euclidienne* et que cet espace X est *euclidien.*

J'appellerai (+ , +) les successions des signes qui précèdent les termes de ma forme quadratique la *signature* de cette métrique. Comme il n'y a que des signes plus je dirai que cette métrique est « elliptique ». Accessoirement je peux voir que cette signature, quand les quantités x et y sont réelles, est une propriété de cet espace. Je peux faire tous les changements de variables que je veux, en ne gardant que deux terme, ma métrique restera inchangée.

Mais j'aurais pu tout aussi bien définir ma matrice *M*, qu'on appelle une matrice de Gramm, comme ceci :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textit{nota bene} : \textit{j'aurais tout aussi bien pu prendre } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si j'applique cette métrique *M* à la définition de ma longueur je verrai que la longueur *L* d'un vecteur *X* est alors :

$$L = \sqrt{x^2 - y^2}$$

Sur le plan différentiel j'aurai :

$$ds^2 = dx^2 - dy^2$$

La signature de cette métrique hyperbolique sera (+ , -). Une métrique hyperbolique est une métrique où les signes ne sont pas tous les mêmes. Nous disons, plus simplement « où il y a des signes moins dans la signature ».

On voit que si j'envisage des courbes dans ce bizarre espace à deux dimensions, le trajet ne sera réel que si :

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| \geq 1$$

Accessoirement j'aurais des bizarres courbes, correspondant à :

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| = 1 \textit{ où } ds = 0\,!$$

Des courbes que je peux parcourir en couvrant un chemin de longueur … nulle !

Changeons x en t et y en x . j'ai alors un espace :

$$X = \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$$

que je vais appeler un espace-temps. J'appellerai X un « événement ».

Si j'en reviens à mon espace hyperbolique, j'aurai :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2$$

Je vois que si je veux que les trajets que l'envisage dans cet espace me donne les « longueurs » réelles il faudra que :

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| \leq 1$$

Je verrai apparaître dans cet espace une vitesse limite égale à 1. Ceci, à partir de chaque point, me définira un « cône à deux dimension » (un ensemble de deux droites de pente ± 1) qui sera l'équivalent d'un « cône de lumière » en Relativité Restreinte. Sur ces droite :

$x = t$ et, sur le plan différentiel $dx = dt$ la longueur parcourue est … nulle. Ce sont les chemins empruntés par les … photons.

Je vois tout de suite ce que vous allez faire. Vous allez prendre une feuille de papier et un stylo. Puis vous tracerez deux axes, perpendiculaires. Horizontalement vous appellerez cela l'axe des x et verticalement ça sera le temps. Après, en partant d'un point quelconque vous tracerez deux droites, de pente plus et moins un et vous déciderez que ceci représente, en 2d, le « cône de lumière ». Tout ce qui chemine à l'intérieur à une vitesse « inférieure à 1 », c'est à dire à notre « vitesse de la lumière ». Mais en faisant cela vous projetez votre « façon de voir » euclidienne dans un monde qui ne l'est simplement pas.

Revenons à notre définition du produit scalaire et à celle de la longueur :

$$L^2 = {}^tX\ M\ X$$

Je vais me donner une groupe qui soit un groupe de matrices. Appelons-les P. Elle « agissent » sur mes lecteurs X, selon l'action :

$$X' = P\,X$$

En utilisant la multiplication matricielle.

Je voudrais trouver des matrices qui conservent cette longueur. J'écrirai donc :

$${}^tX'\,M\,X' = {}^t(\,P\,X\,)\,M\,(\,P\,X\,) = {}^tX\,M\,X$$

Théorème : soit $A\ B$ le produit de deux matrices :

$${}^t(\,A\ B\,) = {}^tB\ {}^tA$$

On l'admettra sans démonstration.
Donc :

$${}^t(\,P\,X\,) = {}^tX\,{}^tP$$

et j'obtiens :

$${}^tX'\,M\,X' = {}^tX\ \ {}^tP\,M\,P\,X = {}^tX\,M\,X$$

Je peux regrouper (associativité du produit matriciel)

$$^tX' \, M \, X' = {}^tX \; ({}^tP \, M \, P) \, X \; = {}^tX \, M \, X$$

Le produit scalaire sera conserve si :

$$^tP \, M \, P \; = \; M$$

On montre que les matrices M forme alors un groupe, satisfaisant aux axiomes de Lie :

C'est une opération de composition interne (le produit de deux matrices carrées de formant (n,n), c'est-à-dire à n lignes et n colonnes donne une matrice carrée de même format.
Il y a un élément neutre.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chaque matrice P possède une matrice inverse P^{-1} , telle que :

$$P \;\; P^{-1} \quad = I$$

M a servi a définir un produit scalaire. Elle ne contient que des termes diagonaux, donc

$$^tM = M$$

De plus ses termes sont égaux à ± 1 . Le produit $M\,M$ est égal à I car égal à :

$$\begin{bmatrix} (\pm 1)^2 & 0 \\ 0 & (\pm 1)^2 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$M^{-1} = M = {}^tM$$

Prenons :

$$^tP \, M \, P \; = \; M$$

Multiplions à droite par P^{-1}

$$^tP \, M \, P \, P^{-1} \; = \; M \, P^{-1} \; = \; {}^tP \, M$$

On multiplie à gauche par ${}^tM$ qui est aussi M^{-1} . On obtient :

$$P^{-1} \; = \; M \, {}^tP \, M$$

P a donc un inverse. Les matrices P forment un *groupe* (le troisième axiome, celui de l'associativité est inhérent à la multiplication matricielle).

On appellera le groupe formé par ces matrices *M le groupe d'isométrie* lié à l'espace *X* parce qu'il conserve les longueurs dans cet espace doté de son produit scalaire, de sa métrique.

Que se passe-t-il si *M* est la matrice unité *I* ?

$$^{t}P\, I\, P \;=\; I$$

où :

$$^{t}P\, P \;=\; I$$

Ce qui revient à :

$$P^{-1} = {}^{t}P$$

Ces matrices sont telles que leur inverse est égal à leur transposé.

On suppose que le lecteur sait ce qu'est le déterminant d'une matrice. Pour une matrice (2,2) c'est simplement :

$$déter\min ant\ de \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\,d - b\,c$$

det (A B) = det (A) x det (B)

det (I) = 1

Par ailleurs det (^{t}A) = det (A)

Donc det (P) = 1

Les matrices qui satisfont à ces propriétés et dont le déterminant est égal à ± 1 sont appelées *matrices orthogonales*.

Nous allons trouver parmi ces matrices le groupe des rotations d'un angle θ autour de l'origine.

$$: \begin{bmatrix} Cos\,\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & Cos\,\theta \end{bmatrix}$$

La matrice inverse correspond à la rotation inverse – θ . On vérifie que c'est bien la transposée de cette matrice. Par ailleurs le déterminant vaut

$$Cos^{2}\theta + sin^{2}\ \theta = 1$$

C'est bien une *matrice orthogonale*. On appelle ce groupe SO2 (« sous-groupe orthogonal »).

On a donc une opération : la rotation autour d'un point-origine, qui conserve les longueurs. On peut faire tourner un segment dont l'origine est en 0. Mais aussi n'importe quel segment et n'importe quel polygone, par exemple un triangle rectangle non isocèle. On peut ainsi faire tourner ce triangle autour de l'origine et chacun de ses côtés voit sa longueur conservée. Mais est-ce la seule opération qui conserve ces longueurs ?

En d'autres termes ces matrices de rotation sont-elles les seules à satisfaire la définition axiomatique :

$$^{t}P\,P = I$$

Non, il y en a d'autres :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad de\ même\ que \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ce sont les symétries par rapporte à des droites (x en – x) , (y en –y) et par rapport à l'origine. Mais la troisième matrice ne constitue pas une nouveauté car c'est aussi une rotation d'un angle π. Par contre les deux premières matrices ne peuvent se réduire à des rotations. Elle inversent d'ailleurs l'orientation des figures géométriques, ce que ne peut pas faire une rotation.

On peut combiner symétrie et rotation en faisant le produit des matrices :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Cos\,\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & Cos\,\theta \end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Cos\,\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & Cos\,\theta \end{bmatrix}$$

qui appartiennent aussi au groupe. On peut aussi le voir en vérifiant que les déterminant de ces matrices vaut ± 1 et que ces matrices résultats du produit sont égales à leurs transposées.

Mais ces deux ensembles de matrices n'en font qu'un. On peut en effet déduire le second ensemble du premier en prenant $\theta = \pi$.

Le groupe O2 peut donc être représenté par :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad avec \qquad \lambda = \pm 1$$

$$\begin{bmatrix} \lambda\cos\theta & -\lambda\sin\theta & \Delta x \\ \sin\theta & \cos\theta & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\cos\theta\, x - \lambda\sin\theta\, y + \Delta x \\ x\sin\theta + y\cos\theta + \Delta y \\ 1 \end{bmatrix}$$

On appelle ce groupe comprenant rotations et symétries le groupe O2. Si on se limite aux rotations on l'appelle alors SO2 (S pour « spécial orthogonal »).

On voit donc une chose. En cherchant le groupe d'isométrie lié à notre espace muni de son produit scalaire nous avons failli … oublier les symétries, éléments importants.

Envisageons maintenant le cas où :

$$X = \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$$

et :

$$M = G = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le groupe d'isométrie est alors défini par :

$$^{t}L\,G\,L = G$$

C'est le groupe de Lorentz dans un espace-temps à deux dimensions. Il conserve la « longueur » dans ce bizarre espace temps, où certains vecteur ont des … longueurs nulles.

Mais qu'est-ce que cette « longueur » ? C'est ce qu'on appelle le « temps propre », le temps « vécu par la particule ». Dans cet espace temps ce groupe L est équivalent au groupe des rotations-symétries O2.

Que remarque-t-on dans ce groupe ?

Il contient les matrices :

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad de\ même\ que \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La troisième matrice ne peut pas cette fois être réduite à une « sorte de rotation ».

- La première matrice représente une symétrie temporelle

- La seconde matrice une symétrie spatiale

- La troisième matrice une symétrie spatio-temporelle.

Comment écrire l'équivalent des matrices de rotation ? En utilisant des lignes de coordonnées hyperboliques. On vérifie que les matrices :

$$\begin{bmatrix} Ch\,\theta & Sh\,\theta \\ Sh\theta & Ch\theta \end{bmatrix}$$

appartiennent bien au groupe. Elles contiennent l'élément neutre, correspondant à $\theta = 0$. Ces matrices sont symétriques. Si elles appartiennent au groupe de Lorentz, alors :

$$\begin{bmatrix} Ch\theta & Ch\theta \\ Sh\theta & Ch\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Ch\theta & Sh\theta \\ Sh\theta & Ch\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Ch\theta & Sh\theta \\ Sh\theta & Ch\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -Ch\theta & -Sh\theta \\ Sh\theta & Ch\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Ch^2\theta + Sh^2\theta & 0 \\ 0 & -Sh^2\theta + Ch^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Car $Ch^2\,\theta - Sh^2\,\theta = 1$

Ces matrices forment un groupe qui est un *sous-groupe* de ce groupe de Lorentz de même que le groupe des rotations SO2 formait un *sous-groupe du groupe orthogonal* O2.

On peut trouver toutes les matrices de ce groupe de Lorentz en multipliant les matrices de ce sous-groupe, qu'on appelle la *composante neutre* (parce qu'elle contient l'élément neutre du groupe) par les trois matrices ci-dessus et on obtient au total quatre paquets de matrices :

$$\begin{bmatrix} Ch\,\theta & Sh\,\theta \\ Sh\theta & Ch\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Ch\theta & Sh\,\theta \\ Sh\theta & Ch\,\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Ch\theta & Sh\,\theta \\ Sh\theta & Ch\,\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Ch\theta & Sh\,\theta \\ Sh\theta & Ch\,\theta \end{bmatrix}$$

On peut aussi synthétiser en écrivant :

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Ch\,\theta & Sh\,\theta \\ Sh\,\theta & Ch\,\theta \end{bmatrix} \qquad avec \qquad \lambda = \pm 1 \qquad et \;\; \mu = \pm 1$$

On découvre ainsi que le groupe de Lorentz possède *quatre composantes connexes.*

Le groupe O2 pouvait agir par exemple sur des droites tracées dans un espace 2d et passant par l'origine. A partir d'une des droites on pouvait construire toutes les autres droites passant par ce point.

Dans notre espace-temps [t , x] les « objets géométriques » sont ce qu'on appellera des *mouvements*. Les deux premières composantes du groupe n'inversent pas le temps. On les appellera *orthochrones.*

$$\begin{bmatrix} Ch\,\theta & Sh\,\theta \\ Sh\theta & Ch\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Ch\theta & Sh\,\theta \\ Sh\theta & Ch\,\theta \end{bmatrix}$$

Mais les deux suivantes sont fort mystérieuses. Elles … inversent le temps ! On les appellera les composantes antichrones :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Ch\theta & Sh\,\theta \\ Sh\theta & Ch\,\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Ch\theta & Sh\,\theta \\ Sh\theta & Ch\,\theta \end{bmatrix}$$

Si on se donne un mouvement orthochrone, censé être orienté dans le sens passé futur, *les composantes antichrones* de groupes transforment ce mouvement en un *mouvement antichrone*, s'effectuant … à rebrousse-temps.

Ca n'est qu'en 1970 avec les travaux de J.M.Souriau qu'on a compris quelle était la signification physique de tels mouvements.

Quand la géométrie dévoile de nouveaux pans du réel.

Revenons à notre groupe O2. On peut le compléter en ajoutant les translations 2d, selon un vecteur :

$$C = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta x \end{bmatrix}$$

On va alors construire la matrice :

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Où la matrice A appartient au *groupe orthogonal* 02. On vérifiera aisément que ces matrices forment un groupe que nous appellerons le groupe d'Euclide à deux dimensions, qui gère :

- Les rotations

- Les translation

- Les symétries

Avant on avait envisagé l'action de groupe :

$$A\,X$$

Où X était le vecteur :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

On va considérer maintenant une autre action que nous écrirons :

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\,X + C \\ 1 \end{bmatrix}$$

Voilà l'action explicitée :

$$\begin{bmatrix} \lambda\cos\theta & -\lambda\sin\theta & \Delta x \\ \sin\theta & \cos\theta & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\cos\theta\, x - \lambda\sin\theta\; y + \Delta x \\ x\sin\theta + y\cos\theta + \Delta y \\ 1 \end{bmatrix}$$

On voit qu'on parvient à gérer rotations, symétries et translation avec une seule et même matrice.

Passons au 3d.
Nous allons combiner de nouveau les rotations, les symétries et les translations.

Nous allons reprendre depuis le début. Soit un point d'un espace 3d. Ecrivons la matrice colonne :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

et la matrice-ligne suivante, sa transposée :

$${}^{t}X = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$$

On définit un produit scalaire par :

$$S = {}^{t}X\ M\ X'$$

Si la matrice est la matrice unité :

$$M = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' & y & z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$$

Le produit scalaire me permettra accessoirement de définir dans cet espace la longueur L d'un vecteur X, selon :

$$L^2 = {}^tX\ M\ X$$

Dans le cas euclidien cette longueur sera toujours r*éelle* (dans la mesure où les variables sont prises dans R) et égale à :

$$L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Si je passe à des valeurs différentielles et à un vecteur dX je peux écrire :

$$ds^2 = {}^tdX\,M\,dX$$

Cette forme quadratique est la *métrique*.

Si $M = I$, cette dernière étant la matrice unité :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

j'aurai :

$$ds^2 = {}^tdX\,M\,dX = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

métrique de cet *espace 3d euclidien*.

Je vais chercher le groupe d'isométrie en écrivant .

$$X' = P\,X$$

Comme tout à l'heure le produit scalaire sera conservé par l'action des matrices P si :

$${}^tP\,M\,P = M$$

On montre que les matrices M forme alors un groupe, satisfaisant aux axiomes de Lie :

C'est une opération de composition interne (le produit de deux matrices carrées de formant (n,n), c'est-à-dire à n lignes et n colonnes donne une matrice carrée de même format.
Il y a un élément neutre.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Chaque matrice P possède une matrice inverse P^{-1} , telle que :

$$P \; P^{-1} \quad = I$$

Dans mon espace euclidien la matrice de Gramm M est la matrice unité. Ce qui fait que j'ai :

$$P \; {}^{t}P \quad = I$$

Donc :

$$P^{-1} = {}^{t}P$$

Ces matrices P sont telles que leurs inverses sont égales à leurs transposées. C'est la définition des *matrices orthogonales*, dont le déterminant est égal en outre à ± 1.

On appelle ce groupe orthogonal O3. Il est le produit du groupe des rotations autour de l'origine par le groupe des symétries par rapport à ce point. Ce dernier est un groupe à deux éléments :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Quand on fait agir le second éléments il opère une P-symétrie, une symétrie de parité sur tout objet de l'espace 3d (symétrie droite-gauche).

Si on fait abstraction de ces symétries il reste un sous-groupe qu'on appelle SO3 (pour « spécial orthogonal ») qui représente le groupe des rotations autour de l'origine. Une telle rotation dépend de trois angles, les angles d'Euler. Nous n'expliciterons pas cette matrice, mais nous voyons que si on appelait O la matrice de ce groupe SO3 , les éléments du groupe O3 serait simplement déduits par :

$$A = \lambda \, O \quad \text{avec } \lambda = \pm 1$$

A partir de ces matrices et du vecteur translation dans les trois dimensions :

$$C = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

on peut construire le groupe d'Euclide 3d :

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

associé à l'action :

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\,X + C \\ 1 \end{bmatrix}$$

Là encore on combine en une seule action matricielle symétrie, rotation et translation.

Essayons maintenant de pointer du doigt le démarche fondamentale en physique mathématique. Le groupe d'Euclide 3d a été construit pour rendre compte de choses qui nous sont familières : transporter des objets 3d dans un espace 3d.

Les groupes ont, entre autres, deux fonctions. Ils permettent de reconnaître que deux objets sont *de même espèce*. Supposons que je sois dans ma cuisine. Une fourchette se trouve posée sur mon évier et une autre sur la table. Il existe une action du groupe d'Euclide qui me permet d'amener la fourchette a sur la fourchette b et de m'apercevoir alors que je peux les faire coïncider. Elles forment donc, dans ma cuisine *l'espèce fourchette.*

Il se trouve que j'ai par distraction acheté plusieurs tire-bouchons chez le même marchand. Là encore je pourrai vérifier qu'ils sont de même espèce en vérifiant qu'il existe un élément du groupe d'Euclide 3d qui me permet de les amener en coïncidence.

Mais si j'explore le groupe d'Euclide, je peux faire émerge toute une famille d'éléments qui provoquent, outre une rotation et une translation, une symétrie droite-gauche. Ces éléments du groupe me donnent des objets « en miroir », énantiomorphes. Mon groupe d'Euclide possède deux composantes connexes :

Si $O \in SO3$

ces composantes peuvent être représentées par les matrices :

$$\begin{bmatrix} O & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix} -O & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments de la première composante (la « composante neutre » puisqu'elle contient l'élément neutre et est un sous-groupe du groupe d'Euclide) conservent l'orientation des objets. Les éléments de la seconde, qui ne forment pas un sous-groupe, l'inversent.

Conceptuellement, je fais « agir » un éléments de ce second ensemble sur un de mes tire-bouchons et j'obtiens alors un tire-bouchon *énantiomorphe*, en miroir. Je suis en droit de me demander si un tel objet peut *physiquement* exister.

Je me rends en ville et je m'adresse au marchand de farces et attrapes de plus proche, qui me fournit une réponse positive. Oui, ce type d'objet peut physiquement exister.

Depuis, ce tire-bouchon énantiomorphe figure en bonne place dans le tiroir de ma cuisine (authentique). Je ne me lasse pas de voir des invités s'escrimer comme des malheureux sur cet objet pour essayer d'ouvrir une bouteille, alors que je leur parle pour détourner leur attention.

Au-delà de cette blague, saisissez-vous la démarche ?

Le physicien est témoin d'un certain nombre de phénomènes, par exemple de *mouvements*. Il invente alors un groupe qui lui permet de rendre compte par exemple des différents mouvements d'un point matériel, qu'il soit électriquement chargé ou non. Ce groupe permet de définir les particules en tant que mouvements. Ainsi le groupe de Poincaré gère « les mouvements relativistes d'un point matériel ». Il est construit autour d'un groupe qui est le groupe de Lorentz, lequel agit sur les points d'un espace quadridimensionnel [x , y , z , t], qu'on appelle alors « événements » alors que tout à l'heure nous avions un « mini-groupe de Lorentz » agissant sur un espace 2d [x , t].

Nous avons vu (nous avons juste effleuré cette question) que le groupe de Lorentz avait quatre composantes connexes, deux « orthochrones » et deux « antichrones ». Tous les éléments de ces ensemble agissent sur des mouvements. Imaginons le mouvement d'un point masse qui ait la bonne idée de se déplacer dans le sens passé-futur et qui par exemple décrive une hélice. La première composante du groupe de Poincaré, la composante neutre, qui contient l'élément neutre, va transporter ce mouvement hélicoïdal selon un autre mouvement hélicoïdal, dans changer le sens de ce vrillage, sans altérer *l'hélicité de ce mouvement*.

La seconde produira un mouvement qui s'effectuera toujours dans le sens passé-futur mais s'opérera avec une *hélicité inversée*. Ce sera comme le mouvement de tout à l'heure, *vu à travers un miroir.*

Un physicien observe le mouvement d'une feuille morte qui tombe en spiralant vers le sol. En faisant agir un élément du groupe de Poincaré appartenant à la seconde composante il obtiendra un mouvement du même type, mais où la feuille morte va spiraler dans l'autre sens. Mais ce mouvement garde pour lui une signification physique.

Ceci étant fait que se passera-t-il si, conceptuellement parlant, le physicien devenu un peu mathématicien-géomètre sur les bords « fait agir sur ce mouvement » des éléments du groupe emprunté aux deux dernières composantes : antichrones ?

La feuille morte va se déplacer du futur vers le passé

Question : de tels mouvements sont-ils envisageables ? Quel sens ont-ils ? De quelle physique relèvent-ils ? Existe-t-il un « magasin de farces et attrapes » pour physicien théoricien où de telles particules, de tels mouvements puissent être considérés, observés ?

Voilà, typiquement, le genre de question que se pose le théoricien. A partir de l'observation de phénomènes connus il a construit un groupe qui décrit ces mouvements. Puis ce groupe s'avère engendrer des mouvements nouveaux, déconcertants. Question : existent-ils ?

Jusqu'on la physique peut-elle aller trop loin ?

Une réponse sera apportée à cette angoissante question quelques rapports plus loin. De même, après avoir construit le groupe de Poincaré, gérant la dynamique du point matériel dénué de charge électrique on créera un groupe en tant « qu'extension non triviale du groupe de Poincaré » qui nous permettra de prendre en charge les mouvements de particules dotées d'une charge électrique q , positive ou négative.

Et c'est alors, en jouant avec ce groupe et ses différentes composantes que nous verrons émerger une nouvelle symétrie qui nous créera des mouvement, sans inversion du temps mais avec inversion de la charge électrique. On pourra se demander si de tels mouvements d'objets cheminant du passé vers le futur et dotés d'une masse m positive, mais d'une charge électrique opposée peuvent physiquement exister.

La réponse historique s'est avérée être positive, ces objets étant… l'antimatière, (C-symétrique par rapport à la nôtre). Autrement dit, au fil de cette initiation, en partant de simples matrices carrées vous allez comprendre ce qu'est l'antimatière, sur la base de considérations purement géométriques.