La géométrisation de la charge électrique, selon J.M.Souriau

J.P.PETIT

9 novembre 2004

Partons de la matrice de Gramm définissant la métrique de l'espace de Minkwoski :

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

On va rajouter au « point évènement » ξ une dimension supplémentaire ζ .

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \qquad\qquad X = \begin{bmatrix} \zeta \\ x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

On conservera ce qu'on pourra appeler une « sous-métrique » basée sur la matrice de Gramm

de format (4,4)

$$^t d\xi \; G \; d\xi = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

La lettre *t* signifie « transposée de la matrice ».

On définit axiomatiquement le groupe de Lorentz L par la relation axiomatique :

$$^t L \; G \; L = G$$

On va définir le vecteur translation spatio-temporelle :

$$C = \begin{bmatrix} \Delta\, x \\ \Delta\, y \\ \Delta\, z \\ \Delta\, t \end{bmatrix}$$

J.M.Souriau définit alors l'élément d'une extension non triviale du groupe de Poincaré :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \zeta \\ \xi \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta + \phi \\ L\xi + C \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matrice inverse :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi' \\ 0 & L' & C' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi + \phi' \\ 0 & L\,L' & L\,C' + C \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$L' = L^{-1}$

$C' = - L^{-1}\, C$

$\phi' = - \phi$

La matrice inverse s'écrit :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\phi \\ 0 & L^{-1} & -L^{-1}C \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On va construire l'action coadjointe de ce groupe à quatre composantes connexes. Ci-après le « vecteur tangent au groupe », élément de son « algèbre-de-Lie », pris au voisinage de l'élément neutre.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & \delta L & \delta C \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme la différenciation est effectuée au voisinage de l'éléments neutre

$$G\,\delta L$$

est une matrice antisymétrique. Appelons-là :

$$G\,\delta L = \omega$$

donc :

$$G\,\delta L = G\,\omega$$

puisque :

$$G\,G = 1$$

On pose :

$$\delta C = \gamma$$

$$\delta\pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\omega & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'action coadjointe est l'action duale de l'application :

$$AA : \{\, \delta\phi \,,\, \omega \,,\, \gamma \,\} \rightarrow \{\, \delta\phi' \,,\, \omega' \,,\, \gamma' \,\}$$

qu'on écrit :

$$\delta\pi' = \pi^{-1} \times \delta\pi \times \pi$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\phi \\ 0 & L^{-1} & -L^{-1}C \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\omega L & G\omega C + \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \phi \\ 0 & L & C \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\phi \\ 0 & L^{-1} & -L^{-1}C \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & G\,\omega L & G\,\omega C + \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta\phi \\ 0 & L^{-1}\,G\,\omega L & L^{-1}\,G\,\omega C + L^{-1}\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\delta\,\phi' = \delta\phi$

G $\omega' = L^{-1}\ G\ \omega L$

$\gamma' = L^{-1}\ G\ \omega\, C + L^{-1}\ \gamma$

mais :

$$L^{-1} = G\ {}^{t}L\ G$$

donc :

$$G\,\omega' = G\ {}^{t}L\ G\ G\ \omega\ L$$

mais :

$$G\,G = 1$$

donc :

$$G\,\omega' = G\ {}^{t}L\ \omega L$$

d'où l'application :

$\delta\,\phi' = \delta\phi$

$\omega' = {}^{t}L\ \omega L$

$\gamma' = G\,{}^{t}L\ \omega\, C + G\ {}^{t}L\ G\ \gamma$

qui constitue l'application recherchée :

$$AA : \{\ \delta\,\phi\ ,\ \omega\ ,\ \gamma\ \} \rightarrow \{\ \delta\,\phi'\ ,\ \omega'\ ,\ \gamma'\ \}$$

Un élément g du groupe est défini par une suite de paramètres { π_i } dont le nombre est la dimension du groupe. On peut écrire l'application :

$$A\,A\ :\ \{\ \delta\pi_i\ \} \rightarrow \{\ \delta\pi_i'\}$$

L'action adjointe du groupe sur son espace des moments se définit (Souriau 1970) comme la coaction, la duale de celle-ci. La dualité se traduit par l'invariance d'un scalaire S :

$$S = \sum_{i=1}^{n} J_i\ \delta\pi_i = \sum_{i=1}^{n} J_i'\ \delta\pi_i' = cons\tan te$$

n étant la dimension du groupe (Ici le groupe est de dimension 11). Les composantes J_i du moment sont donc en nombre égal. .

On décompose le moment J en trois objets. Le premier est un scalaire q , le second une matrice M de format (4 , 4), antisymétrique, ayant donc six composantes. Le troisième est un quadrivecteur P (le quadrivecteur impulsion-énergie) de format (4 , 1) :

$$J = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ E \end{bmatrix}$$

Le moment est :

$$J = \{ q , M , p , E \}$$

Nous écrirons le scalaire sous la forme :

$$S = q\,\delta\phi + \frac{1}{2} T_r \left(M\ \omega \right) + {}^tP\,G\,\gamma$$

T_r signifiant « trace de ».

L'invariance de la forme linéaire fournit la dualité. Reprenons ce qui a été établi plus haut :

$\delta\phi' = \delta\phi$

$\omega' = {}^tL\,\omega\,L$

$\gamma' = G\ {}^tL\,\omega\,C + C\ {}^tL\,G\,\gamma$

$$q\,\delta\phi + \frac{1}{2} T_r \left(M\,\omega \right) + {}^tP\,G\gamma = q'\,\delta\phi + \frac{1}{2} T_r \left(M'\,{}^tL\omega L \right) + {}^tP'G\left(G\,{}^tL\omega L + G\,{}^tLG\gamma \right)$$

On peut permuter les « prime » et tenir compte du faite que $GG = 1$.

$$q'\delta\phi + \frac{1}{2} T_r \left(M'\omega \right) + {}^tP'G\gamma = q\,\delta\phi + \frac{1}{2} T_r \left(M\ {}^tL\omega L \right) + {}^tP\ {}^tL\omega L + {}^tP\ {}^tLG\gamma$$

Puis on peut tout de suite identifier les termes en $\delta\phi$ ce qui donne :

q' = q

En identifiant les termes en γ on trouvera :

$$ {}^tP\, G\, \gamma = {}^tP'\, {}^tL\, G\, \gamma $$

ou :

$$ {}^tP = {}^tP'\, {}^tL $$

Si on transpose l'équation :

$$ P = L\, P' $$

Dans la trace on peut effectuer une permutation circulaire :

$$ T_r\left(M'\, {}^tL\, \omega\, L \right) = T_r\left(L\, M'\, {}^tL\, \omega \right) $$

On identifie les termes en ω :

$$ \frac{1}{2} T_r\left(M\ \omega \right) = \frac{1}{2} T_r\left(L\, M'\, {}^tL\, \omega \right) + {}^tP'\, {}^tL\, \omega\, C $$

Le deuxième terme du second membre est égal au produit d'une matrice ligne par une matrice colonne. On peut commencer par écrire :

$$ {}^tP'\, {}^tL\, \omega\, C = T_r\left({}^tL\, \omega\, C\, P' \right) $$

Dans cette trace nous pouvons opérer deux permutations circulaires successives de manière à amener ω à droite :

$$ T_r\left({}^tL\, \omega\, C\, {}^tP' \right) = T_r\left({}^tP'\, {}^tL\, \omega\, C \right) = T_r\left(C\, {}^tP'\, {}^tL\ \omega \right) $$

On replace ce résultat dans l'équation et on obtient :

$$ \frac{1}{2} T_r\left(M\ \omega \right) = \frac{1}{2} T_r\left(L\, M'\, {}^tL\, \omega \right) + T_r\left(C\, P'\, {}^tL\, \omega \right) $$

ω est une matrice antisymétrique. On va appliquer de nouveau le théorème sur les traces des matrices qui sont le produit d'une autre matrice par une matrice symétrique. Toute matrice peut être symétrisée ou anti-symétrisée. De plus la trace du produit d'une matrice par une matrice symétrique est nulle. Donc :

$$ T_r\left(A\, \omega \right) = Trace\ de\left(antisym\left(A \right) \times \omega \right) $$

Appliquons cela à la matrice $C\, {}^tP'\, {}^tL$ puisque, plus haut, on prend la trace de son produit par une matrice antisymétrique ω.

$$ C\, {}^tP'\, {}^tL = \mathrm{sym}\ (\ C\, {}^tP'\, {}^tL\ ) + \mathrm{antisym}\ (\ C\, {}^tP'\, {}^tL\ ) $$

Mais :

$$T_r\,[\,\mathrm{sym}\,(\,C\,{}^tP'\,{}^tL\,)\times\omega\,]=0$$

Donc :

$$T_r\,[\,C\,{}^tP'\,{}^tL\;\omega\,]=Tr\,[\,\mathrm{antisym}\,(\,C\,{}^tP'\,{}^tL\,)\times\omega\,]$$

$$antisym\left(C\;P'\;{}^tL\right)=\frac{1}{2}\left[C\;{}^tP'\;{}^tL\;+\;{}^t\left(C\;{}^tP'\;{}^tL\right)\right]$$

$${}^t\left(C\;{}^tP'\;\;L\right)=\;\left[{}^tP'\;{}^tL\right]{}^tC=L\;P'\;{}^tC$$

$$antisym\left(C\;{}^tP'\;L\right)=\frac{1}{2}\left(C\;{}^tP'\;{}^tL-L\;P'\;{}^tC\;\right)$$

Finalement :

$$M=L\,M'\,{}^tL+(\,C\,{}^tP'\,{}^tL-L\,P'\,{}^tC\,)$$

On peut inverser les “ ’ ”

$$M'=L\,M\,{}^tL\;+\;(\,C\;{}^tP\;{}^tL\;\;-L\,P\;{}^tC\,)$$

En regroupant le tout on obtient l’action coadjointe du groupe sur son espace des moments :

$$q'=q$$

$$P'=L\,P$$

$$M'=L\,M\,{}^tL\;+\;(\,C\;{}^tP\;{}^tL\;\;-L\,P\;{}^tC\,)$$

Les deux dernières équations s’identifient à l’action coadjointe du groupe de Poincaré sur son espace des moments :

$$J_P=\{\,E\,,\,p_x\,,\,p_y\,,\,p_z\,,\,j_x\,,\,j_y\,,\,j_z\,,\,l_x\,,\,l_y\,,\,l_z\,\}$$

Le moment de notre nouveau groupe, extension non-triviale du groupe de Poincaré est donc :

$$J=\{\,q\,,\,J_P\,\}$$

q est la charge électrique du point matériel chargé. Nous avons défini les particules en tant que mouvements particuliers dans un espace des mouvements. Jusqu’ici notre espace des mouvements était quadridimensionnel :

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

Ici, nous envisageons des mouvements dans un espace pentadimensionnel.

$$X = \begin{bmatrix} \zeta \\ x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

ce qu'on retrouvera dans J.M.Souriau, Géométrie et Relativité, Ed. Hermann 1964 page 413.

La matrice M s'écrit alors :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{bmatrix}$$

Le moment possède onze composantes (leur nombre est égal à la dimension du groupe) :

Un changement de coordonnées adéquat permet de ramener la matrice M à une unique composante scalaire l, ce qui permet d'écrire le moment sous la forme :

$$J_P = \begin{bmatrix} 0 & -l & 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & p & E & 0 \end{bmatrix}$$

Là, on suggère au lecteur de se référer à l'ouvrage de J.M.Souriau « Structure des Systèmes Dynamiques », Dunod 1970 (épuisé par réédité en anglais par Birkhauser ed. 1999).

Le tournoiement a une dimension, qui est :

$$M\,L^2\,T^1$$

Ce que cet auteur montre en faisant apparaître la masse en passant du groupe (relativiste) de Poincaré au groupe (non relativiste) de Bargmann. Cette dimension est alors celle de la constante de Planck. La méthode de quantification géométrique de Souriau permet alors de montrer que ce tournoiement doit être proportionnel à la grandeur « h barre ».

$$h\,"barre" = \frac{h}{2\pi}$$

par ± « h barre ».

Souriau étend son approche en Dotant l'espace temps ξ d'une fibre circulaire, la cinquième coordonnée ζ étant définie modulo 2π. Il montre alors, en faisant jouer la quantification géométrique que q ne peut prendre que des valeurs discrète.

Références :

J.M.Souriau, Structure des Systèmes Dynamiques, Editions Dunod, 1970. Réédité en 1999 par les éditions Birkhauser sous le titre « Structure of Dynamical Systems ».
J.M.Souriau, Géométrie et Relativité, Editions Hermann 1964.