Construction de l'action coadjointe du groupe de Poincaré sur son espace des Moments

J.P.PETIT

10 novembre 2004

Partons de la matrice de Gramm définissant la métrique de l'espace de Minkwoski :

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}$$

Définissons le point-évènement :

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

La métrique est :

$$^t d\xi \; G \; d\xi = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

La lettre t signifie « transposée de la matrice ».

On définit axiomatiquement le groupe de Lorentz L par la relation axiomatique :

$$^t L \; G \; L = G$$

On va définir le vecteur translation spatio-temporelle :

$$C = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta t \end{bmatrix}$$

On définit alors l'éléments du groupe de Poincaré :

$$\begin{bmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice inverse est :

$$\begin{bmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} L^{-1} & -L^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ci-après le « vecteur tangent au groupe », élément de son « algèbre-de-Lie » :

$$\delta g_P = \begin{bmatrix} \delta L & \delta C \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On écrit cette différentielle au voisinage de l'élément neutre du groupe.

Pour construire l'action coadjointe du groupe dont l'élement est g_P nous partons de :

$$\delta g' = {g_P}^{-1} \times \delta g_P \times g_P$$

Comme la différenciation est effectuée au voisinage de l'éléments neutre

$$G\,\delta L$$

est une matrice antisymétrique.

Explication : La définition de la matrice de Lorentz est :

$${}^t L\, G\, L = G$$

différencions.

$${}^t\delta L\, G\, L + {}^t L\, G\, \delta L = 0$$

Faisons $L = 1$ (en notant que ${}^t1 = 1$)

Tenons compte que ${}^tG = G$. On peut écrire :

$$ {}^t\delta L\, {}^tG + G\, \delta L = {}^t(\, G\, \delta L\,) + G\, \delta L = 0 $$

Donc $G\, \delta L$ est une matrice antisymétrique quon appelera ω .

$$ G\, \delta L = \omega $$

où ω est une matrice antisymétrique

Dans l'élément de l'algèbre-de-Lie du groupe, dans la différentielle de la matrice on a le terme δL qu'on écrira sous la forme

$$ \delta L = G\, \omega $$

puisque :

$$ G\, G = 1 $$

On pose :

$$ \delta C = \gamma $$

Nous allons construire l'application :

$$ AA : \{\, \omega\, ,\, \gamma\, \} \rightarrow \{\, \omega'\, ,\, \gamma'\, \} $$

$$ \delta g_P \times g_P = \begin{bmatrix} G\omega & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G\omega\, L & G\omega C + \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} $$

$$ \begin{bmatrix} G\omega' & \gamma' \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L^{-1} G\omega L & L^{-1} G\omega C + L^{-1}\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix} $$

C'est-à-dire :

$$ G\, \omega' = L^{-1}\; G\, \omega L $$
$$ \gamma' = L^{-1}\; G\, \omega C + L^{-1}\, \gamma $$

mais :

$$ L^{-1} = G\ {}^t L\, G $$

donc :

$$G\,\omega' = G\ {}^tL\ G\ G\ \omega\ L$$

mais :

$$G\,G = 1$$

donc :

$$G\,\omega' = G\ {}^tL\ \omega\,L$$

d'où l'application :

$$\omega' = {}^tL\ \omega\ L$$

$$\gamma' = G\ {}^tL\ \omega\ C + C\ {}^tL\ G\ \gamma$$

qui constitue l'application recherchée :

$$AA : \{\ \omega\ ,\gamma\ \} \rightarrow \{\ \omega'\ ,\gamma'\ \}$$

Un élément g_P du groupe de Poincaré G_p est défini par une suite de paramètres $\{\ \pi_i\ \}$ dont le nombre est la dimension du groupe. On peut écrire l'application :

$$AA : \{\ \delta\pi_i\ \} \rightarrow \{\ \delta\pi_i{}'\}$$

L'action adjointe du groupe sur son espace des moments se définit (Souriau 1972) comme la coaction, la duale de celle-ci. La dualité se traduit par l'invariance d'un scalaire S :

$$S = \sum_{i=1}^{n} J_i\ \delta\pi_i = \sum_{i=1}^{n} J_i{}'\ \delta\pi_i{}' = constante$$

n étant la dimension du groupe (dix, pour le groupe de Poincaré). Les composantes J_i du moment sont donc en nombre égal. .

On décompose le moment J en deux objets. Le premier est une matrice M de format (4 , 4), antisymétrique, ayant donc six composantes. Le second est un quadrivecteur P (le quadrivecteur impulsion-énergie) de format (4 , 1) :

$$J = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ E \end{bmatrix}$$

Le moment est :

$$J = \{\ M\ ,\ p\ ,E\ \} = \{\ M\ ,\ P\ \}$$

Nous écrirons le scalaire sous la forme :

$$S = \frac{1}{2} T_r \left(M \ \omega \right) + {}^t P \, G \, \gamma$$

Tr signifiant « trace de ».

L'invariance de la forme linéaire :

$$S = \frac{1}{2} T_r \left(M \, \omega \right) + {}^t P \, G \, \gamma = \frac{1}{2} T_r \left(M' \omega' \right) + {}^t P' \, G \, \gamma'$$

fournit la dualité. Reprenons ce qui a été établi plus haut :

$$\omega' = {}^t L \, \omega \, L$$

$$\gamma' = G \ {}^t L \, \omega \, C + C \ {}^t L \, G \, \gamma$$

$$\frac{1}{2} T_r \left(M \, \omega \right) + {}^t P \, G \, \gamma = \frac{1}{2} T_r \left(M' \ {}^t L \, \omega \, L \right) + {}^t P' \, G \left(G \ {}^t L \, \omega \, C + G \ {}^t L G \, \gamma \right)$$
$$= \frac{1}{2} T_r \left(M' \ {}^t L \, \omega \, L \right) + {}^t P' \, G \, G \ {}^t L \, \omega \, C + {}^t P' \, G \, G \ {}^t L G \, \gamma$$

mais $GG = 1$, donc ceci vaut :

$$\frac{1}{2} T_r \left(M \ \omega \right) + {}^t P \, G \, \gamma = \frac{1}{2} T_r \left(M' \ {}^t L \, \omega \, L \right) + {}^t P \ {}^t L \, \omega \, C + {}^t P \ {}^t L \ G \, \gamma$$

Identifions les termes en γ

$${}^t P \, G \, \gamma = {}^t P' \ {}^t L \, G \, \gamma$$

ou :

$${}^t P = {}^t P' \ {}^t L$$

Si on transpose l'équation :

$$P = L \, P'$$

Dans la trace on peut effectuer une permutation circulaire :

$$T_r \left(M' \ {}^t L \, \omega \, L \right) = T_r \left(L \, M' \ {}^t L \, \omega \right)$$

On identifie les termes en ω :

$$\frac{1}{2}T_r\left(M\ \omega\right)=\frac{1}{2}T_r\left(L\ M'\ {}^tL\ \omega\right)+\ {}^tP'\ {}^tL\ \omega\ C$$

Le deuxième terme du second membre est égal au produit d'une matrice ligne par une matrice colonne. On peut commencer par écrire :

$${}^tP'\ {}^tL\ \omega\ C=T_r\left({}^tL\ \omega\ C\ P'\right)$$

Dans cette trace nous pouvons opérer deux permutations circulaires successives de manière à amener ω à droite :

$$T_r\left({}^tL\ \omega\ C\ {}^tP'\right)=T_r\left({}^tP'\ {}^tL\ \omega\ C\right)=T_r\left(C\ {}^tP'\ {}^tL\ \ \omega\right)$$

On replace ce résultat dans l'équation et on obtient :

$$\frac{1}{2}T_r\left(M\ \omega\right)=\frac{1}{2}T_r\left(L\ M'\ {}^tL\ \omega\right)+T_r\left(C\ P'\ {}^tL\ \omega\right)$$

ω est une matrice antisymétrique. On va appliquer de nouveau le théorème sur les traces des matrices qui sont le produit d'une autre matrice par une matrice symétrique. Toute matrice peut être symétrisée ou anti-symétrisée. De plus la trace du produit d'une matrice par une matrice symétrique est nulle. Donc :

$$T_r\left(A\ \omega\right)=Trace\ de\left(\ antisym\left(A\right)\times\omega\right)$$

Appliquons cela à la matrice $C\ {}^tP'\ {}^tL$ puisque, plus haut, on prend la trace de son produit par une matrice antisymétrique ω.

$$C\ {}^tP'\ {}^tL\ = \mathrm{sym}\ (\ C\ {}^tP'\ {}^tL\ ) + \mathrm{antisym}\ (\ C\ {}^tP'\ {}^tL\ )$$

Mais :

$$T_r\ [\ \mathrm{sym}\ (\ C\ {}^tP'\ {}^tL\ )\times\omega\ ] = 0$$

Donc :

$$T_r\ [\ C\ {}^tP'\ {}^tL\ \omega\ ] = Tr\ [\ \mathrm{antisym}\ (\ C\ {}^tP'\ {}^tL\ )\times\ \omega\ ]$$

$$antisym\left(C\ \ P'\ {}^tL\right)=\frac{1}{2}\left[C\ {}^tP'\ {}^tL\ +\ {}^t\left(C\ {}^tP'\ {}^tL\right)\right]$$

$${}^t\left(C\ {}^tP'\ \ L\right)=\ \left[{}^tP'\ {}^tL\right]{}^tC=L\ P'\ {}^tC$$

$$antisym\left(C\ \ {}^tP'\ L\right)=\frac{1}{2}\left(C\ {}^tP'\ {}^tL-L\ P'\ {}^tC\ \right)$$

Finalement :

$$M = L\, M'\, {}^tL + (\, C\, {}^tP'\, {}^tL - L\, P'\, {}^tC\,)$$

On peut inverser les “ ’ ”

$$M' = L\, M\, {}^tL \;+\; (\, C\ {}^tP\ {}^tL\ - L\, P\ {}^tC\,)$$

Qu’on regroupe avec :

$$P' = L\, P$$

Et on obtient ainsi l’action coadjointe du groupe de Poincaré sur son moment :

$$J_P = \{\ M\,,\, p\,,\, E\ \} = \{\, M\,,\, P\,\}$$

Reprenons la matrice du groupe de Poincaré :

$$\begin{bmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sa transposée est :

$${}^tg_P = \begin{bmatrix} {}^tL & 0 \\ {}^tC & 1 \end{bmatrix}$$

Considérons la matrice antisymétrique :

$$J_P = \begin{bmatrix} M & -P \\ {}^tP & 0 \end{bmatrix}$$

Formons :

$$g_P\ J_P\ \ {}^tg = \begin{bmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M & -P \\ {}^tP & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} L & 0 \\ {}^tC & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$g_P\ J_P\ \ {}^tg_P = \begin{bmatrix} L\, M\ {}^tL + C\ {}^tP\ {}^tL\ - L\, P\ {}^tC & -L\, P \\ {}^tP\ {}^tL & 0 \end{bmatrix}$$

Qu'on peut identifier à la matrice :

$$J_P^{'} = \begin{bmatrix} M' & -P' \\ {}^tP' & 0 \end{bmatrix}$$

On peut alors mettre l'action coadjointe du groupe de Poincaré sous la forme :

$$J_P' = g_P \; J_P \; {}^t g_P$$

M est une matrice antisymétrique qui possède six composantes, assimilables à deux vecteurs à trois composantes . J.M.Souriau l'écrit en faisant donc intervenir deux vecteurs.

Le « passage » :

$$f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ fz \end{bmatrix}$$

et le « tournoiement » :

$$l = \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix}$$

La matrice *M* s'écrit alors :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_x & -f_y & -f_z & 0 \end{bmatrix}$$

Le moment possède bien dix composantes (leur nombre est égal à la dimension du groupe) :

$$J_P = \{ E , p_x , p_y , p_z , j_x , j_y , j_z , l_x , l_y , l_z \}$$

Un changement de coordonnées adéquat permet de ramener la matrice *M* à une unique composante scalaire l , ce qui permet d'écrire le moment sous la forme :

$$J_P = \begin{bmatrix} 0 & -l & 0 & 0 & 0 \\ l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -E \\ 0 & 0 & p & E & 0 \end{bmatrix}$$

Là, on suggère au lecteur de se référer à l'ouvrage de J.M.Souriau « Structure des Systèmes Dynamiques », Dunod 1970 (épuisé par réédité en anglais par Birkhauser ed. 1999).

Le tournoiement a une dimension, qui est :

$$M\,L^2\,T^1$$

Ce que cet auteur montre en faisant apparaître la masse en passant du groupe (relativiste) de Poincaré au groupe (non relativiste) de Bargmann. Cette dimension est alors celle de la constante de Planck. La méthode de quantification géométrique de Souriau permet alors de montrer que ce tournoiement doit être proportionnel à la grandeur « h barre ».

$$h\,\text{"}barre\text{"} = \frac{h}{2\pi}$$

Selon Souriau le classement des particules doit être effectué selon leur moment. Il a fourni une première interprétation purement géométrique du spin s . Les particules ne sont que des mouvements particuliers du « point matériel » inscrits dans « l'espace des mouvements » et gérés par le groupe Dynamique de Poincaré qui gère les « mouvements relativistes ». A chaque mouvement est associé un moment. Ces particules sont donc des moments particuliers. L'analyse de Souriau fait apparaître deux types de particules, à spins entiers : les photons, décrits par leurs moments. Dans la matrice-moment ci-dessus il suffit de remplacer l par ± « h barre ». On obtient alors deux types de photons, qui ne diffèrent que par leur hélicité.

Pour le photon l'énergie et l'impulsion ne sont pas des grandeurs indépendantes.

$$E = h\,n$$

$$p = \frac{h\,\nu}{c}$$

On n'a qu'à remplacer alors les valeurs de l'énergie et de l'impulsions dans les matrices moments des deux types de photons « droit » et « gauche ».

Les neutrinos ont des matrices moment identiques, à la différence que leurs spins sont demi-entiers.

Références : J.M.Souriau, Structure des Systèmes Dynamiques, Editions Dunod, 1970. Réédité en 1999 par les éditions Birkhauser sous le titre « Structure of Dynamical Systems ».