Dynamique du point matériel à énergie négative.

25 octobre 2004

Dans le fichier sur l'action coadjointe du groupe de Poincaré sur son espace mes moments nous avons donné la définition axiomatique du groupe de Lorentz, représenté par des matrices carrées L de format (4,4)

On avait :

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et on avait écrit :

$$^{t}L\ G\ L = G$$

Définissant les éléments du groupe.
L'élément neutre de ce groupe de matrices est :

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quatre autre matrices appartiennent au groupe :

$$A_s = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La première inverse l'espace, mais pas le temps. La seconde inverse le temps mais pas l'espace.Enfin une quatrième :

$$A_{st} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

inverse l'espace et le temps.

Ces matrices appartiennent chacun à un sous ensemble de matrices constituant les quatre *composantes connexes* du groupe de Lorentz. Celle qui contient l'élément neutre est un sous-groupe appelé *composante neutre*.

$$L = \{ L_n , L_s , L_t , L_{st} \}$$

Le sous-ensemble :

$$L_o = \{ L_n , L_s \}$$

Constitue également un sous-groupe que Souriau appelle le sous-groupe *orthochrone.*

L'ensemble :

$$L_{ac} = \{ L_t , L_{st} \}$$

N'est pas un sous-groupe mais c'est le sous-ensemble *antichrone.*

On peut reconstruire l'ensemble du groupe en partant du *groupe neutre* et en le multipliant par les matrices A_s , A_t , A_{st} , ce qu'on peut aussi écrire avec :

$$\Omega = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \qquad avec \qquad \lambda = \pm 1 \qquad et \qquad \mu = \pm 1$$

$$L = \Omega \, L_n$$

Mais on remarquera aussi que :

$$L_{st} = - L_n \qquad et \; L_t = - L_s$$

On peut aussi écrire :

$$L_{ac} = - L_o$$

Et, plus généralement :

$$L = \varepsilon \, L_o \qquad avec \qquad \varepsilon = \pm 1$$

Reprenons, dans toute sa généralité, l'expression de l'action coadjointe du groupe de Poincaré Quand on cherche l'action coadjointe du groupe de Poincaré :

$$\begin{bmatrix} L & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sur son espace des moments, on trouve (le détail du calcul a été donné dans un document précédent) :

$P' = L\,P$

$M' = L\,M\,{}^tL + (C\;{}^tP\;{}^tL - L\;P\;{}^tC)$

On sait que :

$$P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ E \end{bmatrix}$$

C'est le quadrivecteur impulsion-énergie.

Les composantes du groupe qui inversent l'espace inversent aussi l'impulsion. Mais

Les composantes antichrones du groupe inversent l'énergie

Le groupe de Poincaré est censé gérer la *dynamique du point matériel*. Les différentes points matériels sont classés en fonction de leurs mouvements, synonymes d'un choix effectué dans les dix composantes du moment :

$$J_P = \{\; E\,,\, p_x\;,\; p_y\;,\; p_z\;,\; f_x\;,\; f_y\,,\; f_z\;,\, l_x\;,\; l_y\;,\, l_z\;\}$$

Les six dernières composantes sont respectivement celles du « passage » f et du « tournoiement » l , composantes qui sont réunies pour constituer une matrice antisymétrique M :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -l_z & l_y & f_x \\ l_z & 0 & -l_x & f_y \\ -l_y & l_x & 0 & f_z \\ -f_y & -f_x & -fz & 0 \end{bmatrix}$$

Dans :

$$M' = L\,M\,{}^tL + (C\;{}^tP\;{}^tL - L\;P\;{}^tC)$$

Intéressons-nous) $C = 0$. Il reste :

$$M' = L\,M\;{}^tL$$

Quand on applique les formules on trouve que

$$f' = \lambda\;\mu\;f$$

$l' = l$

On a vu que si on se plaçait dans un certain système de coordonnées on pouvait annuler le passage f et que le tournoiement l pouvait alors être identifié au spin s (lui-même quantifié, mais ceci est une autre affaire). Ce qui est important c'est de voir que le signe du spin reste inchangé quel que soit l'élément considéré dans le groupe de Poincaré complet, que l'on prenne cet élément dans l'ensemble orthochrone ou dans l'ensemble antichrone :

$$s' = s$$

En résumé, nous sommes partis de l'idée que les particules pouvaient être appréhendées, définies à partir de leur mouvement. Dit d'une autre façon : en considérant les composantes de leur moment qui, dans le système de coordonnées adéquat se réduit à :

$$J_P = \{ E , p , s \}$$

Si on fait agir un élément qui inverse l'espace, le moment devient :

$$J_P = \{ E , -p , s \}$$

Si on fait agir un élément qui inverse le temps, mais non l'espace, le moment devient :

$$J_P = \{ -E , p , s \}$$

Si on choisit l'élément du groupe dans la composante connexe qui inverse à la fois le temps et l'espace, le moment devient :

$$J_P = \{ -E , -p , s \}$$

Les physiciens théoriciens ont toujours été très mal à l'aise avec les énergies négatives. L'approche classique consiste simplement à … ignorer leur existence ou la simple possibilité qu'elles puissent exister. En effet une rencontre entre deux particules d'énergie $+E$ et $-E$ est problématique. Comme on le verra, ceci n'a rien à voir avec une rencontre entre matière et antimatière, qui ont toutes deux des énergies positives. La rencontre entre deux particules d'énergies opposées donnerait du … rien. Pas de photons, comme lors d'une rencontre entre deux particules de matière et d'antimatière.

Partons d'une particules « normale », se déplaçant dans le sens passé-futur et doté d'une énergie positive $E > 0$, d'une impulsion p et d'un spin s . Elle correspond à un mouvement particulier. Ce qui précède montre qu'il existe des composantes antichrones du groupe de Poincaré qui débouchent sur :

- Des mouvements à « rebrousse-temps »
- Dotées d'une énergie négative $E < 0$

Ces deux aspects étant indissociables. Ce que montre le travail de Souriau de 1970 c'est qu'une particule « qui remonte le temps se comporte comme si elle possédait une énergie négative.

En partant de cet outil d'analyse que sont les groupes dynamiques de la physique il est donc possible d'envisager l'existence de particules à énergie négative.